ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HÀ VĂN DỰ

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HÀ VĂN DỰ

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN, 10/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu **1**

Mở đầu **2**

Chương 1. Bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov **4**

1.1 Bài toán đặt không chỉnh 4

1.1.1 Không gian Banach 4

1.1.2 Toán tử trong không gian Banach 7

1.1.3 Bài toán đặt không chỉnh 15

1.1.4 Ví dụ về bài toán đặt không chỉnh 16

1.2 Phương pháp hiệu chỉnh 17

1.2.1 Toán tử hiệu chỉnh 17

1.2.2 Phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov 19

Chương 2. Hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử ngược đơn điệu mạnh **21**

2.1 Hệ phương trình toán tử đặt không chỉnh 21

2.1.1 Hệ phương trình toán tử 21

2.1.2 Một số bài toán liên quan 22

2.2 Hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử ngược đơn điệu mạnh 24

2.2.1 Phương pháp hiệu chỉnh 24

2.2.2 Sự hội tụ của phương pháp 25

2.2.3 Xấp xỉ hữu hạn chiều 28

Kết luận **35**

Tài liệu tham khảo **36**

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
S_X	mặt cầu đơn vị của X
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid n chiều
$\forall x$	với mọi x
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\mathcal{L}(X,Y)$	tập tất cả các toán tử tuyến tính liên tục từ không gian Banach X vào không gian Banach Y
$C[a,b]$	không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$
l^p	không gian các dãy số khả tổng bậc p
$L^p[a,b]$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J^s	ánh xạ đối ngẫu tổng quát
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Khái niệm bài toán đặt không chỉnh được nhà Toán học Jacques Hadamard người Pháp đưa ra vào năm 1932 khi nghiên cứu ảnh hưởng của bài toán giá trị biên với phương trình vi phân. Ông là người đã chỉ ra những bài toán không ổn định là "bài toán đặt không chỉnh" (xem wikipedia.org/wiki/Jacques Hadamard).

Xét bài toán ngược: tìm một đại lượng vật lý $x \in X$ chưa biết từ bộ dữ kiện $(f_0, f_1, \ldots, f_N) \in Y^{N+1}$, ở đây X và Y là các không gian Banach, $N \geq 0$. Trên thực tế, các dữ kiện này thường không được biết chính xác, mà chỉ được biết xấp xỉ bởi $f_i^\delta \in Y$ thỏa mãn

$$\|f_i^\delta - f_i\| \leq \delta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{1}$$

với $\delta_i > 0$ (sai số cho trước). Bộ hữu hạn dữ kiện $f_i^\delta \in Y$, $i = 0, 1, \ldots, N$ nhận được bằng việc đo đạc trực tiếp trên các tham số. Bài toán này được mô hình hóa toán học bởi

$$A_i(x) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{2}$$

ở đây $A_i : \big(\mathcal{D}(A_i) \subseteq X\big) \to Y$ và $\mathcal{D}(A_i)$ là ký hiệu miền xác định của toán tử A_i tương ứng.

Bài toán (2), nói chung, là một bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa nghiệm không duy nhất và nghiệm của bài toán không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Do đó, người ta phải sử dụng các phương pháp giải ổn định bài toán này. Một trong các phương pháp được sử dụng khá rộng rãi và hiệu quả là phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov.

Mục tiêu của luận văn là trình bày phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử (2) trong trường hợp toán tử A_0 đơn điệu, *hemi*-liên tục, còn các toán tử A_i, $i = 1, \ldots, N$ có tính chất ngược đơn điệu mạnh trong không gian Banach thực phản xạ X trong bài báo [9] công bố năm 2018.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu khái niệm về không gian Banach, toán tử đơn điệu, đơn điệu cực đại, toán tử liên tục, khả vi Fréchet trong không gian Banach cùng một số tính chất; định nghĩa và ví dụ về bài toán ngược đặt không chỉnh; trình bày phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov hiệu chỉnh phương trình toán tử đơn điệu. Chương 2 giới thiệu về hệ phương trình toán tử đặt không chỉnh, trình bày phương pháp hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử ngược đơn điệu mạnh và xấp xỉ hữu hạn chiều nghiệm nghiệm chỉnh trong không gian Banach cùng các định lý hội tụ mạnh.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy - Người đã tận tình hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này. Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu Trường PTDTBT THCS Trung Hà, xã Trung Hà, huyện Chiêm Hóa, tỉnh Tuyên Quang đã luôn tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả hoàn thành khóa học. Chân thành cảm ơn gia đình, đồng nghiệp, bạn bè đã luôn cổ vũ, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu./.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Tác giả luận văn

Hà Văn Dự

Chương 1

Bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov

Chương này giới thiệu về bài toán đặt không chỉnh trong không gian Banach; trình bày ví dụ về bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov hiệu chỉnh bài toán này. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1], [3], [4] và [5].

1.1 Bài toán đặt không chỉnh

Mục này trình bày các kiến thức về: không gian Banach, bài toán ngược đặt không chỉnh và ví dụ về bài toán ngược đặt không chỉnh.

1.1.1 Không gian Banach

Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm về không gian định chuẩn và không gian Banach (xem [3]).

Định nghĩa 1.1.1 Cho X là một không gian tuyến tính trên trường số thực $\mathbb{R}$. Ánh xạ $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ được gọi là một chuẩn trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $||x|| \geq 0$ với mọi $x \in X$; $||x|| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;

(ii) $||kx|| = |k|||x||$ với mọi $x \in X$, với mọi $k \in \mathbb{R}$;

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ với mọi $x, y \in X$.

Không gian tuyến tính X cùng với chuẩn $\|.\|$ xác định như trên được gọi là không gian định chuẩn, ký hiệu là $(X, ||.||)$.

Định nghĩa 1.1.2 Dãy $\{x_n\}$ trong không gian định chuẩn X được gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x_0 \in X$, ký hiệu là $x_n \rightharpoonup x_0$, nếu với mọi $f \in X^*$, không gian liên hợp của X, ta có $f(x_n) \to f(x_0)$ khi $n \to \infty$.

Nhận xét 1.1.3 Một dãy hội tụ mạnh thì hội tụ yếu, nhưng điều ngược lại không đúng. Ví dụ, trong không gian Hilbert l^2 ta lấy dãy $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ sao cho

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{khi} \quad i = j \\ 0, & \text{khi} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) \in l^2$ ta có $\langle e_j, \varphi \rangle = \varphi_j$. Vì $\varphi \in l^2$ nên $\lim\limits_{j \to \infty} \varphi_j = 0$, tức là dãy $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ hội tụ yếu đến phần tử 0. Nhưng dãy này không hội tụ mạnh vì $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ với mọi i khác j, nên dãy $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ không phải là dãy Cauchy trong l^2.

Chú ý 1.1.4 Trong không gian định chuẩn X nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x_0 thì $x_n \rightharpoonup x_0$ và $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Định nghĩa 1.1.5 Không gian định chuẩn đầy đủ được gọi là không gian Banach.

Sau đây ta dùng ký hiệu $\|.\|$ cho chuẩn trong X và X^* và viết tích đối ngẫu $\langle x^*, x \rangle$ thay cho giá trị của phiếm hàm tuyến tính $x^* \in X^*$ tại điểm $x \in X$, tức là $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$.

Ví dụ 1.1.6 Các không gian sau đây là không gian Banach:

(i) không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$ với chuẩn xác định bởi:

$$||x||_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

(ii) không gian $C[a,b]$ các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ với chuẩn xác định bởi:

$$||f|| = \sup_{x\in[a,b]} \{|f(x)|\}, \quad f \in C[a,b].$$

Định nghĩa 1.1.7 Không gian Banach X được gọi là phản xạ nếu với mọi phần tử $x^{**} \in X^{**}$, không gian liên hợp thứ hai của X, đều tồn tại phần tử $x \in X$ sao cho

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \quad \forall x^* \in X^*.$$

Ví dụ 1.1.8 (i) Không gian $\mathbb{R}^n$, không gian Hilbert H, không gian l^p và $L^p[a,b]$ với $1 < p < \infty$ là các không gian phản xạ.

(ii) Các không gian l^1, L^1 không phản xạ.

Định lý sau đây được dùng cho chứng minh sự hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh ở Chương 2.

Định lý 1.1.9 (xem [4]) *Giả sử X là không gian Banach. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) *X là không gian phản xạ.*

(ii) *Mọi dãy bị chặn trong X đều có dãy con hội tụ yếu.*

Định nghĩa 1.1.10 Không gian Banach X được gọi là

(i) lồi chặt nếu với mọi x, y thuộc mặt cầu đơn vị S_X của không gian Banach X, $S_X := \big\{x \in X : \|x\| = 1\big\}$, $x \neq y$, thì

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1, \quad \lambda \in (0,1);$$

(ii) lồi đều nếu với mọi $0 < \varepsilon \leq 2$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ và $\|x - y\| \geq \varepsilon$ thì tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

Ví dụ 1.1.11 (i) Không gian $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ với chuẩn $\|x\|_2$ được xác định như Ví dụ 1.1.6(i) là không gian lồi chặt.